# Strumentazione e misure Elettroniche 03EMN
# Ponte di Wheatstone

Valeria Teppati

October 6, 2004

# 1 Introduzione

Scopo di questa esercitazione è la misura di un resistore incognito di circa 1.2 kΩ con una incertezza relativa non superiore a $10^{-2}$. Lo studente ha a disposizione un potenziometro da 1 kΩ come resistore variabile. Per l'esercitazione si utilizza un multimetro digitale al fine di misurare i valori delle resistenze disponibili, per caratterizzare la resistenza del potenziometro in funzione della posizione del cursore e come rivelatore di zero del ponte. I resistori a disposizione per l'esercitazione sono:

- 3 resistori da 560 Ω,
- 2 resistori da 5.6 kΩ,
- 1 resistore da 6.8 kΩ,
- 1 resistore (incognito) da 1.2 kΩ.

# 2 Ponte di Wheatstone

La figura 1 mostra lo schema di principio del ponte di Wheatstone per la misura di resistenze, in cui $R_x$ è il resistore da misurare e $R_v$ il potenziometro che permette di equilibrare il ponte in modo tale da avere $V_d \simeq 0$. Con questa particolare configurazione si ottiene:

$$V_d = \left( \frac{R_v}{R_v + R_1} - \frac{R_x}{R_x + R_2} \right) \cdot V_{cc}, \tag{1}$$

per cui, se il ponte è in equilibrio ($V_d \simeq 0$ V) si ottiene:

$$\frac{R_1}{R_v} = \frac{R_2}{R_x}, \tag{2}$$

dunque $R_x = k \cdot R_v$, con $k = R_2/R_1$.

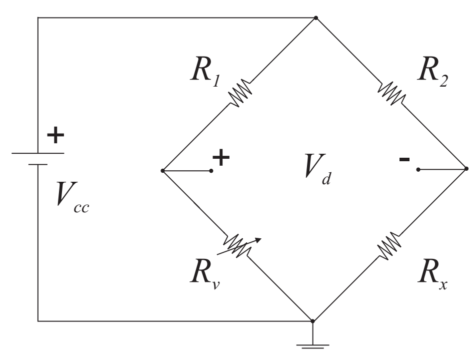


Figure 1: Schema del ponte di Wheatstone utilizzato.

Se $R_1$ ed $R_2$ sono due resistenze di valore noto, allora $R_x$, ovvero la resistenza incognita da misurare dipende solo da $R_v$ (resistenza variabile). Di quest'ultima, nel caso di un potenziometro di cui si conosce l'andamento in base alla posizione della manopola, è possibile effettuare una caratterizzazione per mezzo di un multimetro con accuratezza adeguata. La gamma di resistenze che si riesce a misurare è data da:

$$kR_{vmin} \leq R_x \leq kR_{vmax}. \tag{3}$$

Nell'esercitazione il potenziometro utilizzato ha un valore variabile fra 0 e 1 kΩ.

## 3 Caratterizzazione del potenziometro

Nella presente esercitazione la resistenza variabile $R_v$ presente nella figura 1 è costituita da un potenziometro lineare con manopola graduata. Prima di poter essere utilizzato nel ponte di Wheatstone, il potenziometro deve essere caratterizzato ricavando la *tabella di taratura* che rappresenta il valore di resistenza del potenziometro in funzione della posizione della manopola. Si misuri, con il multimetro digitale presente sul banco, l'effettiva resistenza del potenziometro in corrispondenza degli indici da 0 a 10, scegliendo un passo opportuno (minimo 11 punti).

La tabella di taratura deve essere in seguito approssimata con una curva opportuna. Qual è la migliore approssimazione possibile? Per velocizzare le operazioni, si ricorre all'ausilio del PC (Excel, ad esempio).

Per calcolare l'incertezza associata ad ogni punto della caratteristica bisogna tenere conto di tre contributi:

- incertezza della misura di resistenza con multimetro (1), ricavabile dalle specifiche dello strumento,
- incertezza legata alla sensibilità della manopola, stimabile come 1/4 di tacca (2),
- differenza rispetto al valore della curva di regressione (3).

Si compili quindi una tabella simile a quella riportata nel seguito (Table I), che indichi la corrispondenza tra valore letto sulla scala graduata, valore di resistenza misurato, tre contributi di incertezza e incertezza totale.

Una volta calcolata l'incertezza associata ad ogni punto della caratteristica, occorre darne una approssimazione. Si può usare un metodo *worst case*, oppure una formula binomia, a voi la scelta.

Fare un grafico dei punti acquisiti, della curva approssimante, degli intervalli di incertezza nei punti acquisiti e della fascia di incertezza complessiva.

Cosa succederebbe se si rifacesse la taratura usando un metodo a 4 fili invece che a 2?

Table 1: Tabella di taratura del potenziometro

| Lettura scala | Resistenza, $\Omega$ | Inc. (1), $\Omega$ | Inc. (2), $\Omega$ | Inc. (3), $\Omega$ | Inc. totale, $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

# 4 Considerazioni sulla sensibilità

Nell'ipotesi che il ponte sia in equilibrio, si definisce il fattore di scala (o guadagno del ponte) $A$ come:

$$\frac{R_1}{R_v} = \frac{R_2}{R_x} = A. \tag{4}$$

La tensione $V_d(R_v)$ si può esprimere come sviluppo in serie di Taylor attorno al punto $R_v - R_{v0}$, tale per cui $V_d(R_{v0}) = 0$:

$$V_d = V_d(R_{v0}) + \frac{\partial V_d}{\partial R_v}(R_v - R_{v0}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_d}{\partial R_v^2}(R_v - R_{v0})^2 + \ldots . \tag{5}$$

Da semplici calcoli a partire dalla 1 si trova:

$$V_d = S\frac{dR_v}{R_v} - \frac{S}{A+1}\left(\frac{dR_v}{R_v}\right)^2 + \ldots, \tag{6}$$

con

$$S = \frac{A}{(A+1)^2}V_{cc}. \tag{7}$$

$S$ rappresenta quindi la sensibilità del ponte, mentre dal fattore $\frac{S}{A+1}$ dipende la non linearità del ponte. Si studi l'andamento di queste due curve.

Si noti che Per $A = 1$ (ponte a resistenze uguali) si ha la massima sensibilità, a discapito, però, della linearità. Questa, infatti, migliora al crescere di $A$.

# 5 Caratterizzazione del ponte fuori equilibrio

Obiettivo di questa parte dell'esercitazione è quello di valutare la sensibilità del ponte misurando i valori di $V_d$ e di $dR_v/R_v$. Per far ciò si varii la posizione della manopola del potenziometro caratterizzato in precedenza.

## 5.1 Ponte con $A = 1$

Realizzate il circuito di figura 1 con $R_1 = R_2 = R_x = 560\Omega$. Alimentate il ponte con $V_{cc} = 4V$. Equilibrate il ponte agendo su $R_v$ e misurando $V_d$ per mezzo del voltmetro digitale. Misurate la sensibilità del ponte misurando la variazione di tensione $V_d$ al variare del potenziometro per alcuni valori vicini al valore di riposo (manopola graduata intorno al valore 5). Confrontate i risultati ottenuti con i valori calcolati per $A = 1$. Fate il grafico della tensione $V_d$ in funzione di $dR_v/R_v$ variando la posizione della manopola del potenziometro $R_v$ tra gli indici 0 e 10.

Ripetere la misura con Vcc = 8V.

### 5.2 Ponte con $A = 10$

Ripetere il punto precedente con $R_1 = R_2 = 5.6k\Omega$ e $R_v = R_x = 560\Omega$. Confrontate i risultati di sensibilità e linearità nei due casi $A = 1$ e $A = 10$.

## 6 Calcolo dell'incertezza di $R_x$

Dalla:

$$\frac{R_x}{R_v} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{8}$$

segue, secondo un modello di incertezza di tipo deterministico, che:

$$\epsilon_{R_x} = \epsilon_{R_1} + \epsilon_{R_2} + \epsilon_{R_v}, \tag{9}$$

dove $\epsilon_i$ è l'incertezza relativa della grandezza riportata a pedice.

Adottando invece il modello propabilistico per l'espressione dell'incertezza di misura, nell'ipotesi che $R_1$, $R_2$ ed $R_x$ siano statisticamente indipendenti (ipotesi che può essere considerata valida se i tre resistori provengono da differenti processi di produzione) si ha:

$$u_r(R_x) = \sqrt{u_r^2(R_1) + u_r^2(R_2) + u_r^2(R_v)}, \tag{10}$$

dove $u_r^2(R_i)$ è l'incertezza tipo relativa della resistenza $R_i$.

Il termine $\epsilon_{R_v}$, oltre ai contributi di incertezza dovuti alla taratura del potenziometro calcolati precedentemente, presenta un termine aggiuntivo:

$$\epsilon_{R_v} = \frac{\epsilon_{V_d} V_d}{S}. \tag{11}$$

La 9 permette di determinare l'incertezza relativa associabile alla misura di $R_x$. Questa formula va utilizzata per determinare i contributi di incertezza tollerabili nei componenti del ponte al fine di avere, secondo le specifiche di progetto, $\epsilon_{R_x} = 10^{-2}$.

## 7 Misura di resistenza incognita

Per mezzo delle equazioni presentate in precedenza, si dimensioni il ponte in modo tale da ottenere una incertezza relativa di $R_x$ non superiore a $10^{-2}$. Calcolare, per mezzo della curva di taratura del potenziometro, il valore della resistenza incognita $R_x$. Calcolarne l'incertezza, secondo le considerazioni ai punti 3 e 6.