Esercitazione n°2

DETERMINAZIONE DELLA MISURA DI UN RESISTORE INCOGNITO TRAMITE PONTE DI WHEATSTONE.

La misurazione di una resistenza in corrente continua si può effettuare, in alternativa ai metodi volt-amperometrici, con il cosiddetto ponte di Wheatstone, il quale è un metodo cosiddetto “di zero”, in quanto l’azzeramento della tensione in un ramo del circuito permette di esprimere il valore del misurando in funzione di un campione omogeneo con il misurando stesso. Un metodo “di zero” richiede l’uso di un campione di riferimento variabile finemente e di un rivelatore di zero; ovviamente l’incertezza di misura ottenibile è funzione dell’incertezza con cui è noto il campione di riferimento.

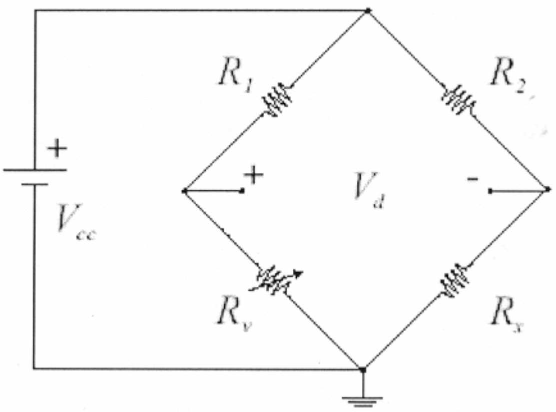


Figura 1. Schema del ponte di Wheatstone.

Il ponte può essere realizzato come in figura 1, mediante due resistori fissi R_1 e R_2, che realizzano il cosiddetto lato di rapporto, e un reostato variabile R_v che insieme al misurando realizza il cosiddetto lato di confronto. La condizione di equilibrio (ovvero di azzeramento della tensione ai capi del rivelatore di zero V_d) si ottiene variando il valore si R_v. Il valore del resistore incognito è ricavabile dalla relazione:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_v$$

1) STRUMENTI UTILIZZATI

- Multimetro numerico Hewlett Packard 34401 A le cui specifiche vengono sotto riportate:

Accuracy Specifications ± (% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
Resistance [4]	100.0000 Ω	1 mA	0.0030 + 0.0030	0.008 + 0.004	0.010 + 0.004	0.0006 + 0.0005
	1.000000 kΩ	1 mA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	10.00000 kΩ	100 μA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	100.0000 kΩ	10 μA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	1.000000 MΩ	5 μA	0.002 + 0.001	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0010 + 0.0002
	10.00000 MΩ	500 nA	0.015 + 0.001	0.020 + 0.001	0.040 + 0.001	0.0030 + 0.0004
	100.0000 MΩ	500 nA // 10 MΩ	0.300 + 0.010	0.800 + 0.010	0.800 + 0.010	0.1500 + 0.0002

- Reostato con manopola graduata e resistenza variabile da 0 a 1 KΩ (risoluzione 1Ω , incertezza 0,5 Ω);
- 3 resistori da del valore nominale di 560 Ω;
- Alimentatore stabilizzato Philips DC Power Supply;
- Basetta sperimentale per connettere i resistori e costruire il ponte;
- Cavi per la realizzazione della connessione.

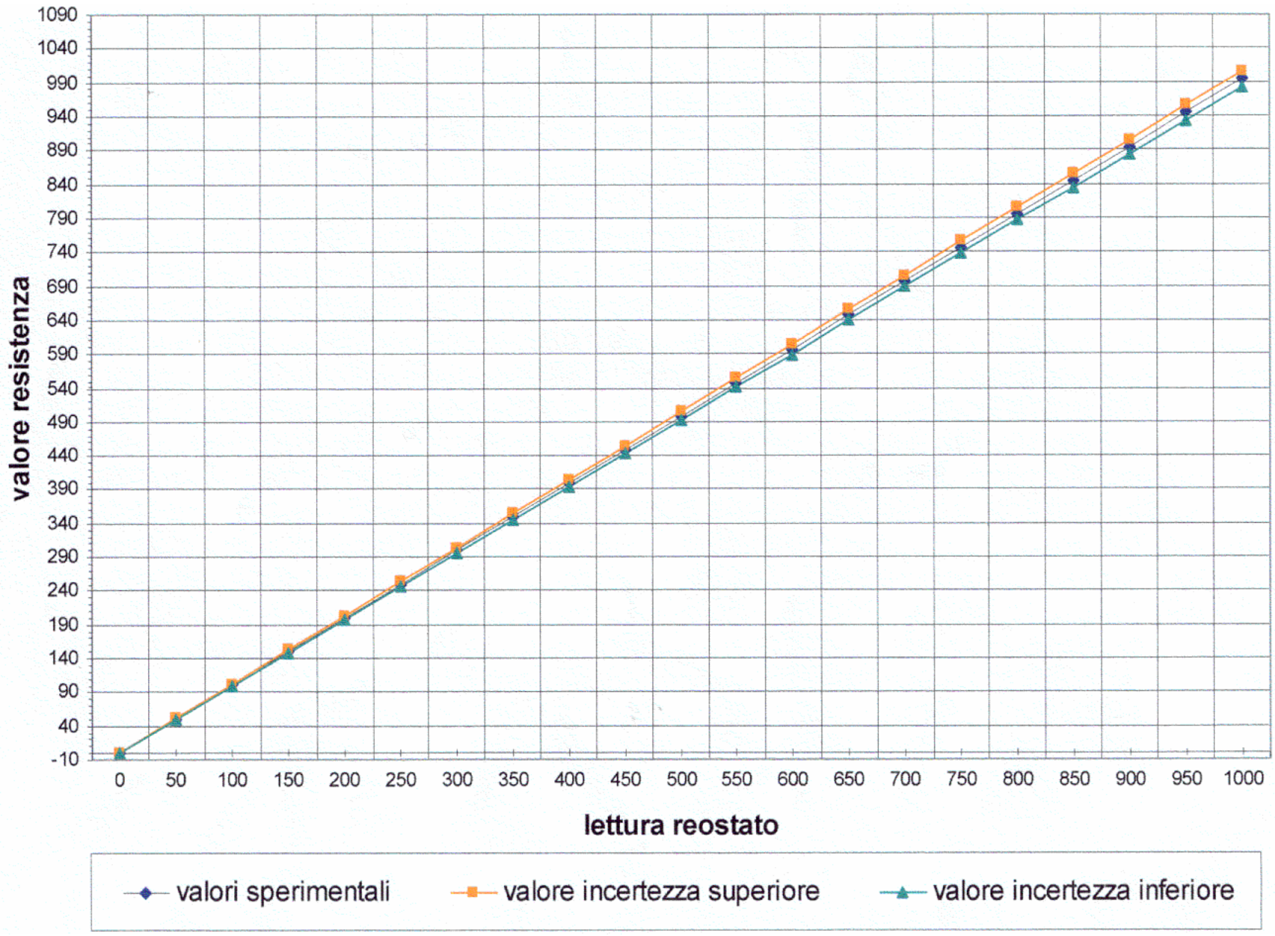
2) DETERMINAZIONE DELLA CURVA DI TARATURA DEL REOSTATO

Prima di utilizzare il reostato come resistenza variabile all'interno del ponte si è provveduto alla sua taratura. Si è dunque costruita una tabella di taratura che rappresenta il valore di resistenza del potenziometro in funzione della posizione letta sulla manopola. Le misurazioni sono state effettuate con un multimetro digitale, presente sul banco, con le specifiche sopra citate, incrementando via via il valore della resistenza variabile di 50 divisioni per volta (corrispondenti a 50 Ω). Qui di seguito si riporta la tabella dei valori. Nella tabella di seguito riportata sono indicati, per colonne, rispettivamente, nella prima il valore indicato dalla manopola del reostato; nella seconda la resistenza letta sul multimetro calcolata con connessione a due fili; nella terza la resistenza letta sul multimetro calcolata con connessione a 4 fili; nella quarta e nella quinta l'errore percentuale dovuto al multimetro funzione della lettura e del campo di variazione della resistenza misurata; la sesta fornisce l'incertezza totale dovuta allo strumento di misura; la settima l'incertezza dovuta alla posizione delle divisioni della manopola e l'ottava fornisce l'incertezza totale in valore assoluto.

Resistenza	Lettura 2 wire	Lettura 4 wire	Errore percentuale di lettura (0.01%lettura)	Errore percentuale strumentale (0,004%range)	Incertezza del multimetro	Incertezza del Reostato	Incertezza Totale
0,000	0,170	0,142	$0,001*10^{-2}$	$0,400*10^{-2}$	0,401	0,500	0,901
50,000	50,844	50,818	$0,508*10^{-2}$	$0,400*10^{-2}$	0,908	0,500	1,408
100,000	100,681	100,655	$1,007*10^{-2}$	$0,400*10^{-2}$	1,407	0,500	1,907
150,000	150,280	150,250	$1,503*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	2,503	0,500	3,003
200,000	199,970	199,940	$1,999*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	2,999	0,500	3,499
250,000	249,450	249,430	$2,494*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	3,494	0,500	3,994
300,000	299,330	299,300	$2,993*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	3,993	0,500	4,493
350,000	348,990	348,960	$3,490*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	4,490	0,500	4,990
400,000	398,630	398,610	$3,986*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	4,986	0,500	5,486
450,000	448,010	447,980	$4,480*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	5,480	0,500	5,980
500,000	497,640	497,610	$4,976*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	5,976	0,500	6,476
550,000	547,220	547,190	$5,472*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	6,472	0,500	6,972
600,000	596,620	596,590	$5,966*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	6,966	0,500	7,466
650,000	646,720	646,690	$6,467*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	7,467	0,500	7,967
700,000	696,070	696,040	$6,960*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	7,960	0,500	8,460
750,000	745,910	745,880	$7,459*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	8,459	0,500	8,959
800,000	795,520	795,490	$7,955*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	8,955	0,500	9,455
850,000	844,860	844,830	$8,44*10^{-2}8$	$1,000*10^{-2}$	9,448	0,500	9,948
900,000	894,520	894,490	$8,945*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	9,945	0,500	10,445
950,000	944,160	944,140	$9,441*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	10,441	0,500	10,941
1000,000	993,290	993,260	$9,933*10^{-2}$	$1,000*10^{-2}$	10,933	0,500	11,433

* Tutte le grandezze riportate in tabella sono espresse in Ω.

Si è scelto di effettuare un'interpolazione tra due punti adiacenti ottenendo così una spezzata in modo da minimizzare gli errori causati dall'interpolazione stessa.
Nel grafico, in figura 2, di seguito riportato sono evidenziati sia la retta di taratura sia gli scostamenti positivi e negativi dai valori sperimentali dovuti ad errori strumentali e dell'osservatore che opera la misura, errori di natura statistica.



1090
1040
990
940
890
840
790
740
690
640
590
540
490
440
390
340
290
240
190
140
90
40
-10
valore resistenza
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800
850
900
950
1000
lettura reostato
valori sperimentali
valore incertezza superiore
valore incertezza inferiore

3) REALIZZAZIONE DEL PONTE E MISURA DEL RESISTORE INCOGNITO

I resistori R_1, R_2 ed R_X hanno una resistenza nominale di 560 Ω, mentre, effettuando la misura con lo strumento digitale a ponte automatico, i valori ottenuti e gli errori associati sono stati i seguenti:

$$R_1 = 553{,}6\ \Omega \pm 0{,}1\ \Omega$$
$$R_2 = 553{,}1\ \Omega \pm 0{,}1\ \Omega$$
$$R_X = 551{,}4\ \Omega \pm 0{,}1\ \Omega$$

Il valore letto sul potenziometro che porta a rilevare una V_d sul voltmetro pari a zero è $R_v = 554{,}5$ Ω. Il valore realmente assunto da R_v deve essere individuato sulla curva di taratura in figura 2. Supponendo un'interpolazione lineare tra i valori 550 e 560 Ω risulta:

$$R_v = \frac{\Delta Y}{\Delta X} R_{vletto}$$

dunque:

$$R_v = \frac{596{,}620 - 547{,}220}{50} \cdot 554{,}5 = 547{,}8\Omega$$

Il valore di R_X incognito risulta quindi:

$$R_x \frac{R_2}{R_1} R_v = 548{,}3\Omega$$

4) CONSIDERAZIONI SULL'INCERTEZZA DI R_X

L'incertezza relativa di R_X si può esprimere, secondo il modello deterministico, come:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_v$$

con: ε_1 corrispondente all'errore su R_1
ε_2 errore su R_2
ε_v errore sulla resistenza variabile R_v.

I valori di ε_1 ed ε_2 si trovano facilmente:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}1}{553{,}6} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{0{,}1}{553{,}1} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$$

Per il calcolo di ε_v è necessario tenere conto di due contributi:

- il primo contributo è ricavabile dalle specifiche del multimetro, esattamente come fatto in precedenza ad ogni step della variazione del potenziometro:

$$\delta_v = 0{,}01 \cdot 10^{-2} \cdot R_v + 0{,}004 \cdot 10^{-2} \cdot range = 0{,}01 \cdot 10^{-2} \cdot 547{,}8 + 0{,}004 \cdot 10^{-2} \cdot 1000 = 9{,}47 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_{v1} = \frac{\delta_v}{R_v} = 0{,}17\% = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$$

- il secondo contributo è relativo alla sensibilità del ponte. La relazione utilizzata per trovare R_X è infatti valida solo nell'ipotesi che il ponte sia perfettamente equilibrato. Questa condizione, tuttavia, non può essere verificata esattamente in quanto, a causa della sensibilità finita del ponte, non è possibile leggere sullo strumento un valore di tensione di equilibrio inferiore a 0,03 mV.

Nell'ipotesi che il ponte sia in equilibrio, si definisce il guadagno del ponte come:

$$\frac{R_1}{R_v} = \frac{R_2}{R_x} = A.$$

Sviluppando la tensione $V_d(R_v)$ in serie di Taylor nell'intorno di R_v, tale che $V_d(R_v) = 0$, si ottiene:

$$V_d = V_d(R_{v0}) + \frac{\partial V_d}{\partial R_v}(R_v - R_{v0}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_d}{\partial R_v^2}(R_v - R_{v0})^2 + \ldots.$$

Poiché V_d è esprimibile come:

$$V_d = \left(\frac{R_v}{R_v + R_1} - \frac{R_x}{R_x + R_2}\right) \cdot V_{cc},$$

da semplici calcoli si ha:

$$V_d = S\frac{dR_v}{R_v} - \frac{S}{A+1}\left(\frac{dR_v}{R_v}\right)^2 + \ldots,$$

con S la sensibilità del ponte:

$$S = \frac{A}{(A+1)^2}V_{cc}.$$

Trascurando i termini di ordine maggiore di uno nello sviluppo, e, considerando A circa uguale a 1, si ottiene S = V_{cc}, con V_{cc} = tensione di alimentazione di 4V.
Ora, se V_d = 0,03 mV come detto:

$$\frac{dR_v}{R_v} = \frac{0{,}03mV}{1V} = 3 \cdot 10^{-5} = \varepsilon_{v2}$$

L'incertezza totale su R risulta quindi:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_{v1} + \varepsilon_{v2}) = 5{,}3 \cdot 10^{-4}$$

che su una misura dell'ordine di 500 Ω rappresenta un risultato abbastanza soddisfacente.

Nel calcolo dell'errore non si è tenuto conto dell'effetto delle resistenze dei cavi e delle resistenze di contatto e la presenza di forze termoelettromotrici causate dal contatto tra differenti metalli che si trovano a differenti temperature (effetto Seebeck).